Université Abdelmalek Essaâdi

Faculté des Sciences et Techniques

Tanger

2010 Semestre II

MIPC I-6 & GEGM I-2

Module P111

Electricité série 2

I/ 1/ Deux charges identiques q sont disposées en deux sommets d'un carré. Quelles charges q' et q'' faut-il placer aux deux autres sommets pour que la résultante des forces subies par chacune des charges soit nulle.

II/ On dispose aux sommets d'un triangle équilatéral de côté a, trois charges ponctuelles –e. Déterminer la force subie par une des charges.

2/ On place une charge +e au centre de gravité du triangle. Déterminer les forces subies par cette charge et par la charge située au sommet.

III/ Une distribution de charges de densité λ est uniformément répartie sur un arc de cercle de rayon a vu du centre sous un angle 2θ.

1/ Déterminer le champ électrostatique créé au centre et en déduire le champ pour $\theta = \pi$.

2/ Déterminer le champ créé par un anneau de rayon a et de même densité λ au point M de son axe de coordonné z, en déduire sa valeur au centre O.

IV/ Déterminer le champ créé par une distribution de charges de densité σ uniformément répartie sur un disque de rayon a et d'épaisseur négligeable, en un point M de l'axe du disque de coordonné x.

V/ Une distribution de charges de densité λ est uniformément répartie sur un segment de droite AB de longueur 2b. Déterminer le champ créé :

1/ En un point de la droite n'appartenant pas au segment

2/ En un point quelconque distant de a du fil (cas particulier des point situés sur l'axe de symétrie)

ETUSUP .com

3/En déduire le champ créé par un fil infini.

4/ Retrouver le résultat à l'aide du théorème de Gauss.

VI/ Une surface sphérique S (sphère creuse) de rayon R porte une distribution de charge uniforme σ.

1/ Déterminer le champ et le potentiel à l'intérieur et à l'extérieur de la surface S.

2/La sphère est maintenant pleine de densité ρ.

VII/Sur un axe x'ox sont placées : une charge ponctuelle +2q au point O et une charge ponctuelle –q au point A d'abscisse $x = a$ ($a > 0$).

1/ Calculer directement le potentiel V(x) aux divers points de l'axe.

2/ Calculer directement le champ **E**(x) aux divers points de l'axe. Vérifier les résultats obtenus.

3/ Une charge ponctuelle q' peut se déplacer sur x'ox. Déterminer les positions d'équilibre. Discuter leur stabilité suivant le signe de q'.

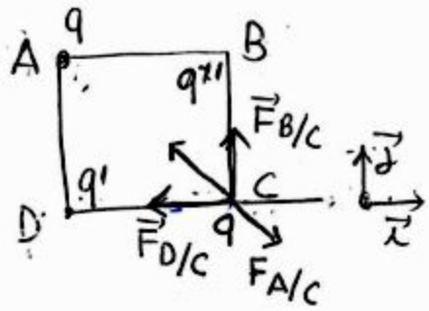
VIII/ Un cylindre creux d'épaisseur négligeable, de rayon a et de longueur τ infinie porte une distribution de charges σ. Déterminer le champ et le potentiel en un point M intérieur et extérieur au cylindre.

Reprendre la question pour un cylindre plein de densité uniforme ρ.

ETUSUP .com

Institut la centrale — Electrostatique — Série 2 — 09-10

I/ Remarque : Les 2 charges identiques doivent être placées sur les extremités d'une diagonale q' et q'' sont placées sur les autres extremités



$$\vec{F}_{B/C} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q''q}{BC^2}\vec{j} \quad ; \quad \vec{F}_{D/C} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q'q}{DC^2}(-\vec{i})$$

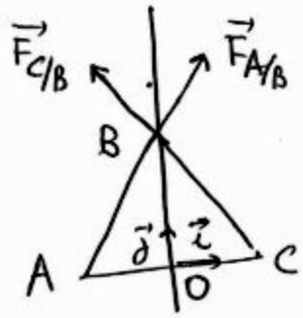
$$\vec{F}_{A/C} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{AC^2}\vec{u} \qquad \vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i}-\vec{j})$$

$$\vec{F}_{B/C} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q''q}{a^2}\vec{j} \quad ; \quad \vec{F}_{D/C} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q'q}{a^2}\vec{i} \quad ; \quad \vec{F}_{A/C} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{2a^2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i}-\vec{j})\right)$$

On a $\vec{F}_{B/C} + \vec{F}_{D/C} + \vec{F}_{A/C} = \vec{0} \Rightarrow \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\left(q''\vec{j} - q'\vec{i} + \frac{q}{2\sqrt{2}}\vec{i} - \frac{q}{2\sqrt{2}}\vec{j}\right) = \vec{0}$

$q'' - \frac{q}{2\sqrt{2}} = 0$ et $-q' + \frac{q}{2\sqrt{2}} = 0$ d'où $q' = q'' = \frac{q}{2\sqrt{2}}$

II/ 1/

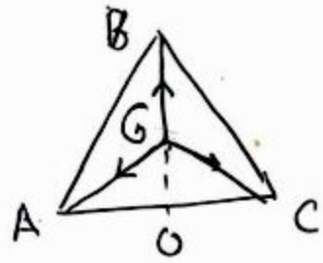


- $F_{A/B} = F_{C/B} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{e.e}{AB^2} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 a^2}$
- $\vec{F}_{A/B} = F_{A/B}\cos\theta\,\vec{j} + F_{A/B}\sin\theta\,\vec{i} \qquad \theta = \frac{\pi}{6}$

$\vec{F}_{C/B} = F_{C/B}\cos\theta\,\vec{j} - F_{A/B}\sin\theta\,\vec{i}$

$$\vec{F} = \vec{F}_{A/B} + \vec{F}_{C/B} = 2F_{A/B}\cos\theta\,\vec{j} = 2\cdot\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j} = \frac{e^2\sqrt{3}}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\vec{j}$$

2/



$\vec{F}_{A/G} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{AG^2}\vec{u_1} \quad ; \quad \vec{u_1} = \frac{\vec{GA}}{GA}$

$\vec{F}_{B/G} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{BG^2}\vec{u_2} \quad ; \quad \vec{u_2} = \frac{\vec{GB}}{GB}$

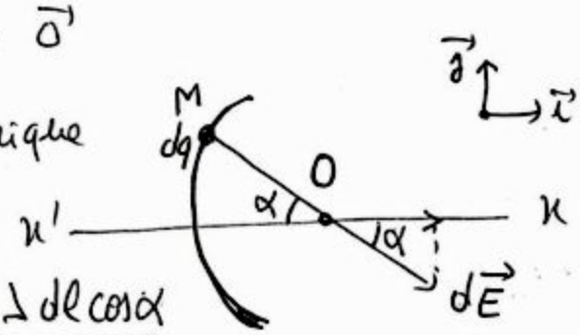
$\vec{F}_{C/G} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{CG^2}\vec{u_3} \quad ; \quad \vec{u_3} = \frac{\vec{GC}}{GC}$

$AG = BC = CG = \frac{2}{3}BO = \frac{a}{\sqrt{3}}$

G est centre de gravité du triangle ABC d'où $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$

et par suite $\vec{F}_{A/G} + \vec{F}_{B/G} + \vec{F}_{C/G} = \vec{0}$

III/ 1/. la distribution de charges est symetrique par rapport à l'axe x'Ox donc



$\vec{E} = E(x)\,\vec{i}$

- $dE(x) = dE.\cos\alpha = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{dq}{OM^2}\cos\alpha = \frac{\lambda\, dl\cos\alpha}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$

ETUSUP .com

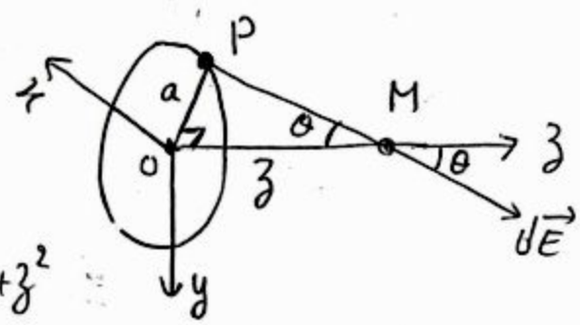
Or $dl = R\,d\alpha$ d'où $dE(x) = \dfrac{\lambda \cos\alpha}{4\pi\varepsilon_0}\,d\alpha$

$$E(x) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\theta}^{\theta}\cos\alpha\,d\alpha = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left[\sin\alpha\right]_{-\theta}^{\theta} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left(\sin\theta - \sin(-\theta)\right) = \frac{\lambda\sin\theta}{2\pi\varepsilon_0}$$

$$\vec{E}(O) = \frac{\lambda\sin\theta}{2\pi\varepsilon_0}\,\vec{i}$$

. Pour $\theta = \pi$: $\sin\theta = 0$; $\vec{E}(O) = \vec{0}$

2/ . La distribution est symétrique par rapport à Oz donc $\vec{E} = E(z)\,\vec{k}$



. $dE(z) = dE.\cos\theta = \dfrac{dq\,\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0\,PM^2}$

$dq = \lambda\,dl$; $PM^2 = OP^2 + OM^2 = a^2 + z^2$

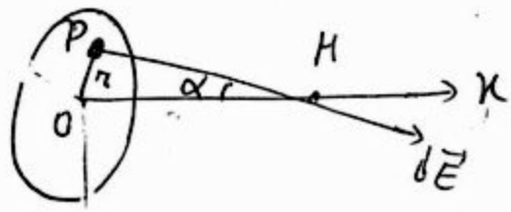
$\cos\theta = \dfrac{OM}{PM} = \dfrac{z^2}{(a^2+z^2)^{1/2}}$ $\Rightarrow$ $dE(z) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\dfrac{\lambda z}{(a^2+z^2)^{3/2}}\,dl$

$$E(z) = \int dE(z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda z}{(a^2+z^2)^{3/2}}\int_0^{2\pi a} dl = \frac{\lambda z.(2\pi a)}{4\pi\varepsilon_0(a^2+z^2)^{3/2}} = \frac{\lambda a z}{2\varepsilon_0(a^2+z^2)^{3/2}}$$

$$\vec{E}(M) = \frac{\lambda a z}{2\varepsilon_0(a^2+z^2)^{3/2}}\,\vec{k}$$

. Au centre O : $z = 0$ $\Rightarrow$ $\vec{E}(O) = \vec{0}$

IV/. La distribution de charges est symetrique par rapport à (Ox) donc $\vec{E} = E(x)\,\vec{i}$



. $dE(x) = dE.\cos\alpha = \dfrac{dq\,\cos\alpha}{4\pi\varepsilon_0\,PM^2} = \dfrac{\sigma\,ds\,\cos\alpha}{4\pi\varepsilon_0(r^2+x^2)} = \dfrac{\sigma\,r\,dr\,d\theta\,\cos\alpha}{4\pi\varepsilon_0(r^2+x^2)}$

$\cos\alpha = \dfrac{OM}{PM} = \dfrac{x}{(r^2+x^2)^{3/2}}$ d'où $dE(x) = \dfrac{\sigma x}{4\pi\varepsilon_0}\,\dfrac{r\,dr\,d\theta}{(r^2+x^2)^{3/2}}$

$$E(x) = \iint_D dE(x) = \frac{\sigma x}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^R r\,(r^2+x^2)^{-3/2}\,dr.\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\left[\theta\right]_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2}(r^2+x^2)^{-1/2}\right]_0^R$$

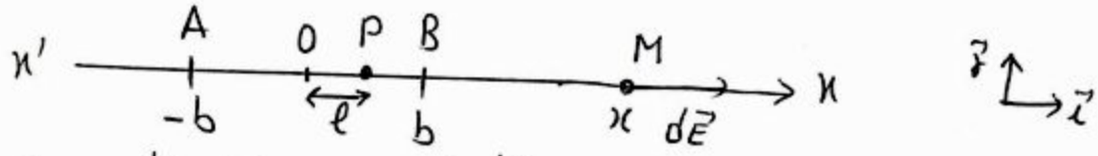
$$E(x) = \frac{\sigma x}{4\pi\varepsilon_0}(2\pi)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)\left[\frac{1}{\sqrt{r^2+x^2}}\right]_0^R = \frac{\sigma x}{4\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{R^2+x^2}} - \frac{1}{|x|}\right)$$

ETUSUP .com

Electrostatique série 2 (suite)

V/

1/

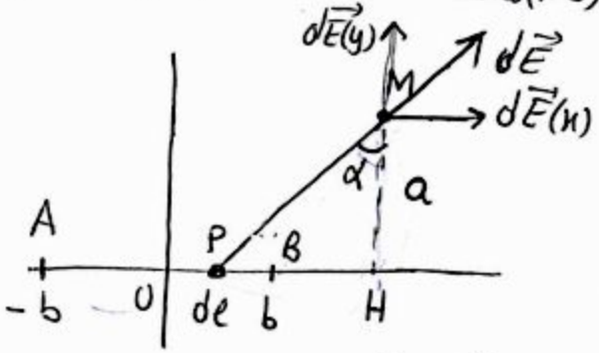


$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{PM^2}\vec{i} = \frac{\lambda\, d\ell}{4\pi\varepsilon_0 (x-\ell)^2} \quad ; \vec{E}(M) = E(M)\vec{i}$$

$$E(M) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-b}^{b}\frac{d\ell}{(x-\ell)^2} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{x-\ell}\right]_{-b}^{b} = \frac{}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{x-b}-\frac{1}{x+b}\right) = \frac{\lambda b}{2\pi\varepsilon_0(x^2-b^2)}$$

$$\Rightarrow \vec{E}(M) = \frac{\lambda b}{2\pi\varepsilon_0(x^2-b^2)}\vec{i}$$

2/



$$dE = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 PM^2} = \frac{\lambda\, d\ell}{4\pi\varepsilon_0 PM^2}$$

$$\tan\alpha = \frac{PH}{MH} = \frac{x-\ell}{a} \Rightarrow \frac{d\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{d\ell}{a}$$

d'où $d\ell = \frac{-a\, d\alpha}{\cos^2\alpha}$. $\cos\alpha = \frac{MH}{PM} = \frac{a}{PM} \Rightarrow PM^2 = \frac{a^2}{\cos^2\alpha}$

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\lambda\left(\frac{-a\, d\alpha}{\cos^2\alpha}\right)}{\frac{a^2}{\cos^2\alpha}} = \frac{-\lambda\, d\alpha}{4\pi\varepsilon_0 a}$$

$$E(x) = \int dE(x) = \int dE\cdot\sin\alpha = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\frac{-\lambda}{a}\sin\alpha\, d\alpha = \frac{\lambda}{a}\left[\cos\alpha\right]_{\alpha_1}^{\alpha_2} = \frac{\lambda}{a}(\cos\alpha_2-\cos\alpha_1)$$

$$E(y) = \int dE(y) = \int dE\cos\alpha = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} -\frac{\lambda}{a}\cos\alpha\, d\alpha = \frac{\lambda}{a}\left[-\sin\alpha\right]_{\alpha_1}^{\alpha_2} = \frac{\lambda}{a}(\sin\alpha_1-\sin\alpha_2)$$

$\alpha_1 = M\hat{A}H$; $\cos\alpha_1 = \frac{MH}{MA} = \frac{a}{\sqrt{(b+x)^2+a^2}}$; $\sin\alpha_1 = \frac{b+x}{\sqrt{(b+x)^2+a^2}}$

$\alpha_2 = M\hat{B}H$; $\cos\alpha_2 = \frac{MH}{MB} = \frac{a}{\sqrt{(x-b)^2+a^2}}$; $\sin\alpha_2 = \frac{x-b}{\sqrt{(x-b)^2+a^2}}$

$$\vec{E}(M) = \frac{\lambda}{a}\left((\cos\alpha_2-\cos\alpha_1)\vec{i} + (\sin\alpha_1-\sin\alpha_2)\vec{j}\right)$$

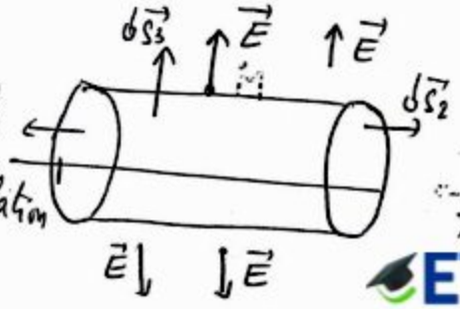
3/ Champ créé par un fil infini

On fait tendre b vers $+\infty$ et on obtient :

$\sin\alpha_1 \to 1$; $\sin\alpha_2 \to -1$; $\cos\alpha_1 \to 0$; $\cos\alpha_2 \to 0$

et $\vec{E}(M) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 a}\vec{j}$

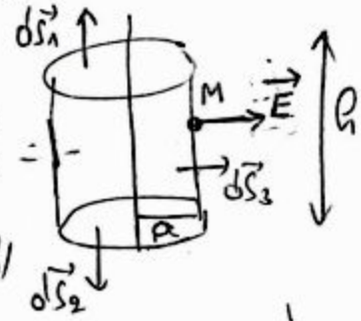
4/ le fil est invariant par rotation autour de lui et il est invariant par translation



ETUSUP .com

suivant sa direction donc le champ est radial càd $\vec{E} = E(r)\,\vec{e_r}$

Soit la surface de Gauss S : le cylindre de rayon a de hauteur h et d'axe le fil

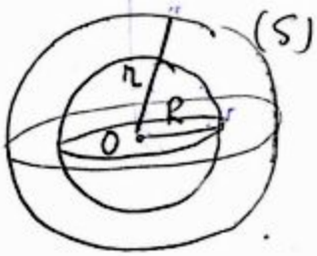


Alors $\phi = \iint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \iint_{S_1} \vec{E}\cdot d\vec{S_1} + \iint_{S_2} \vec{E}\, d\vec{S_2} + \iint_{S_3} \vec{E}\cdot d\vec{S_3} =$

$= \iint_{S_3} E\cdot dS_3 = E \iint_{S_3} dS_3 = E.S_3 = E(2\pi a h)$

Aussi $\phi = \dfrac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \dfrac{\int dq}{\varepsilon_0} = \dfrac{\lambda}{\varepsilon_0}\int_0^h dl = \dfrac{\lambda h}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 a}$

VI/ 1/ la distribution est sphérique donc le champ E est radial



$\vec{E} = E(r)\,\vec{e_r}$

Considérons la surface de Gauss, la sphère de centre O et de rayon r

Alors $\phi = \iint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \dfrac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$

$\phi = \iint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \iint_S E(r)\,\vec{e_r}\cdot dS\cdot\vec{e_r} = \iint_S E(r)\,dS = E(r)\iint_S dS = 4\pi r^2 E(r)$

$Q_{int} = \iiint_V dq = \iiint_V \tau\, dV$

- Si $r < R$ alors $Q_{int} = 0$ et $E(r) = 0 \Rightarrow \vec{E} = \vec{0}$
- Si $r > R$ alors $dV = R^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$ $(r = R = cte)$

$Q_{int} = \tau R^2 \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \tau R^2 (2)(2\pi) = 4\pi R^2 \tau$

d'où $4\pi r^2 E(r) = \dfrac{4\pi R^2 \tau}{\varepsilon_0} \Rightarrow E(r) = \dfrac{R^2}{\varepsilon_0 r^2} \Rightarrow \vec{E} = \dfrac{\tau R^2}{\varepsilon_0 r^2}\vec{e_r}$

2/ $Q_{int} = \iiint_V dq = \iiint_V \rho\, dV$

- Si $r < R$ alors $Q_{int} = 0$ et $E(r) = 0 \Rightarrow \vec{E} = \vec{0}$
- Si $r > R$ alors $dV = r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$ (r est variable)

$Q_{int} = \rho \int_0^R r^2 dr \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \rho\, \dfrac{R^3}{3} \times 2 \times 2\pi = \dfrac{4\pi\rho R^3}{3}$

(ou bien : $Q_{int} = \iiint_V \rho\, dV = \rho \iiint_V dV = \rho . V = \rho . \dfrac{4\pi R^3}{3}$)

d'où $\dfrac{4\pi\rho R^3}{3\varepsilon_0} = 4\pi r^2 E(r) \Rightarrow E(r) = \dfrac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}$

ETUSUP .com

ETUSUP.com

Programmation
Cours
Informatique
Optique
Chimie
Algébre
Corrigés
Mathématiques
Travaux Pratiques
Electricité
Physique
Résumés
Analyse
Diapo
Exercices
Livres
Contrôles Continus
Langues
MTU
Mécanique
Thermodynamique
Divers
Multimedia
Economie
Travaux Dirigés
Droit
Chimie Organique

et encore plus..